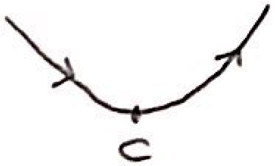
Yerel Ekstremumların Belirlenmesinde Artanlık Azalanlık İlişkisi

f fonksiyonunun bir ekstremum noktası c ise c noktasının maksimum veya minimum nokta olup olmadığını c noktasının solunda ve sağında fonksiyonun artan ve azalanlık karakterine bakarak anlayabiliriz.

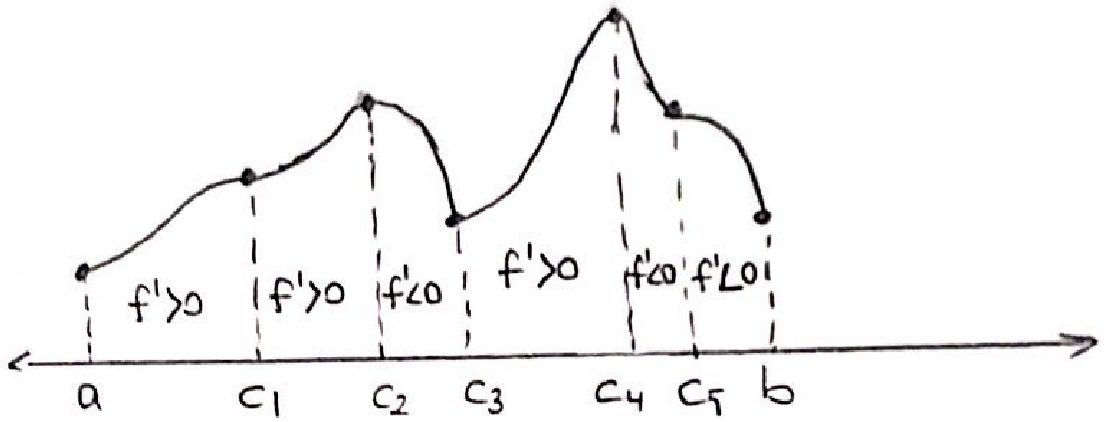
1) f fonksiyonu c noktasının solunda artan, sağında azalan ise c yerel maksimum noktadır.

2) f fonksiyonu c noktasının solunda azalan sağında artan ise c noktası yerel minimum noktadır.



1 ve 2 dikkate alınırsa ekstremum noktada fonksiyonun türevi işaret değiştirmelidir. Böylece f' fonksiyonu c noktasında negatiften pozitife geçmişse c yerel minimum ; pozitiften negatife geçmiş ise c yerel maksimum noktadır.

Buna göre eğer f' türev fonksiyonunun grafiği verilirse ekstremum noktaları ve türlerini belirleyebiliriz. Buna yerel ekstremumlar için Birinci türev testi denir.



Grafiğe göre a noktası mutlak minimum noktası c_4 noktası mutlak maksimum noktasıdır.

c_1 ve c_5 noktasında f' türev fonksiyonu işaret değiştirmediğinden ekstremum yoktur.

c_2 noktasında $f'(c_2)=0$ ve f' işaret değiştirir, artanlıktan azalanlığa geçer o halde c_2 yerel maksimum,

c_3 noktasında $f'(c_3)=0$ ve f' azalanlıktan artanlığa geçer o halde c_3 yerel minimum.

b noktasına sadece soldan bakılır, yerel minimum vardır.

Örnek: $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin 2x$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm:

$$f'(x) = 1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

I. ve IV. bölge $\qquad 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad Ç.K = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\searrow$	min	$\nearrow$	maks	$\searrow$	min	$\nearrow$	maks.	$\searrow$	

Örnek: $f(x) = x^2$ nin $[-2,1]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri?

Çözüm:

$f'(x) = 2x = 0 \quad x = 0$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

Ayrıca uç noktalara bakılır

$f(0) = 0 \quad , f(-2) = 4 \quad , f(1) = 1$

O halde $x = 0$ mutlak min. noktası, $x = -2$ mutlak maks.

$f(0) = 0$ mutlak min. değeri

$f(-2) = 4$ " maks. değeri

Örnek: $f(x)=x^{2/3}$ ün $[-2,3]$ aralığında mutlak ekstremumları,

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

türevin kökleri yok. f' nin tanımsız olduğu nokta 0 ve uç noktalara bakalım.

$f(0)=0$ $\quad f(-2)=\sqrt[3]{4}$ $\quad f(3)=\sqrt[3]{9}$

$x=0$ mutlak minimum noktası

$x=3$ mutlak maksimum "

Örnek: $g(x)=8x-x^4$ ün $[-2,1]$

$g'(x)=8-4x^3=0$ $\quad x=\sqrt[3]{2}>1$ tanım kümesine ait olmayan nokta, O halde mutlak ekstremumlar uç noktalarda olur.

$g(-2)=-32$ $\quad g(1)=7$

$x=1$ mutlak maks. $\quad x=-2$ mutlak min.

Örnek! $g(x) = 8x - x^4$ fonksiyonunun $[-2,1]$ aralığındaki ekstremumları?

Çözüm!

$$g'(x) = 8 - 4x^3 = 0 \qquad x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} > 1$$

tanım kümesine ait olmayan nokta

Dolayısıyla mutlak ekstremumlar uç noktalarda aranır.

$g(-2) = -32$ $\qquad$ $x=-2$ mutlak maks. noktası

$g(1) = 7$ $\qquad$ $x=1$ mutlak min. noktası.

Yerel Ekstremumlar için İkinci Türev Testi

f fonksiyonu ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon ve c noktası kritik nokta olsun. ($f'(c)=0$ olsun).
Yine f'' fonksiyonunun c noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda

* $f''(c)<0$ ise c noktası yerel maksimum nokta
* $f''(c)>0$ ise c noktası yerel minimum noktadır.
* Eğer $f''(c)=0$ olursa bu test cevap vermez.

Örnek: $f(x)=x^4-4x^3+10$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını inceleyelim.

Çözüm:

$f'(x)=4x^3-12x^2=0 \Rightarrow 4x^2(x-3)=0$ $\quad x_1=x_2=0$, $x_3=3$ kritik noktalardır.

$f''(x)=12x^2-24x$

$f''(0)=0$ olduğundan $x=0$ için birşey söyleyemeyiz

$f''(3)=36>0$ olduğundan $x=3$ yerel minimum noktadır

x	$-\infty$		0		3		∞
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

f'nin işaret tablosundan, $x=3$ yerel minimum nokta ve $x=0$ ekstremum nokta değildir.

Örnek: $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 7$ fonksiyonunun yerel ekstremum

$f'(x) = x^4 - x^3 = 0$ $\quad x = 0 \quad x = 1$ kritik noktalar

$f''(x) = 4x^3 - 3x^2$

$f''(0) = 0$ birşey söylenemez,

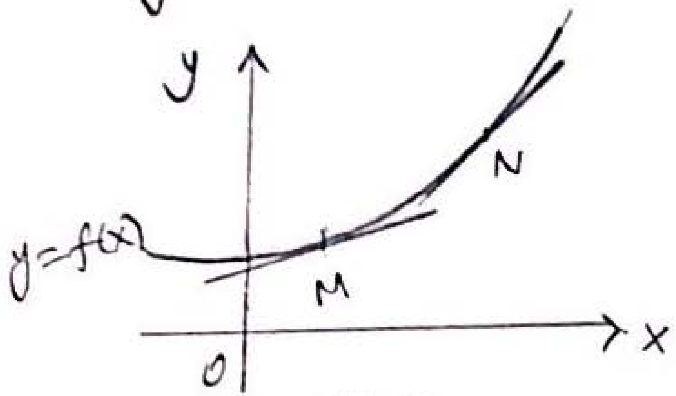
$f''(1) = 1 > 0$ $\quad x = 1$ yerel min. nokta.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
	↗		↘		

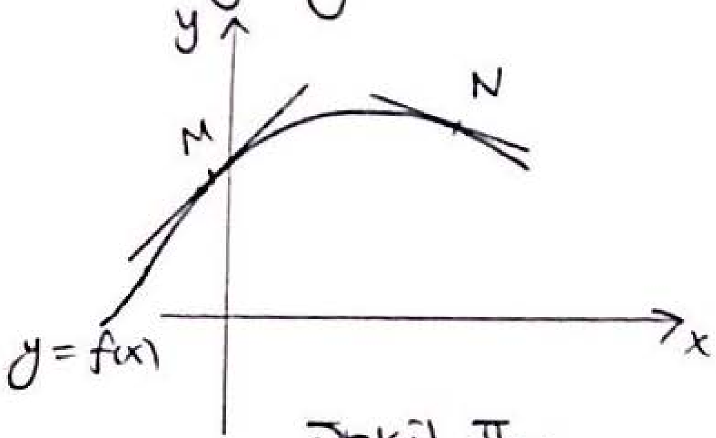
Grafikten $x = 0$ noktası yerel maks. noktadır.

Fonksiyonların Bükeyliği (Konkavlık)

Aşağıdaki iki şekilde, $y=f(x)$ eğrisini ve bu eğri üzerindeki hareketli bir noktayı göz önüne alalım.



Şekil I.



Şekil II.

Şekil I. de olduğu gibi bu hareketli nokta M den N ye doğru ilerlediğinde teğetler saat yönünün tersine döner ve eğri teğetlerin üzerinde kalır ise eğriye yukarı konkavdır (konvekstir) denir.

Şekil II. de olduğu gibi bu hareketli nokta M den N ye doğru ilerlediğinde, teğetler saat yönünde döner ve eğri teğetlerin altında kalır ise eğriye aşağı konkavdır (konkavdır) denir.

Teğetin şekil I de olduğu gibi saat yönünün tersine dönmesi, $f'(x)$ fonksiyonunun türevinin artan bir fonksiyon olması anlamındadır. Buda $f''(x) > 0$ olduğunu söyler.

Benzer şekilde teğetin şekil II de olduğu gibi saat yönünde dönmesi $f'(x)$ türevinin azalan bir fonksiyon olması anlamındadır. Buda $f''(x) < 0$ olduğunu söyler.

Fonksiyonun II türevinin belirli bir aralıktaki işareti geometrik olarak fonksiyonun grafiğinin bükeyliğinin yönü hakkında bilgi vermektedir.

Tanım (Konkavlık için II. türev testi):

$y=f(x)$ fonksiyonunun $I \subset \mathbb{R}$ aralığında ikinci türevi olsun.

$f''(x)>0$ ise f nin grafiği I aralığında yukarı konkav

$f''(x)<0$ ise f nin grafiği I aralığında aşağı konkavdır.

Örnek: $y=3x^5-10x^3$ eğrisinin konkavlığını inceleyiniz.

Çözüm: $y'=15x^4-30x^2$ ve $y''=60x^3-60x$

$\Rightarrow y''=60x(x^2-1)=60x(x-1)(x+1)=0 \quad x_1=0, x_2=1, x_3=-1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	A.K		Y.K		A.K		Y.K

Tanım (Dönüm (Büküm) Noktası): Fonksiyonun grafiğinin yukarı konkavlıktan aşağı konkavlığa veya aşağı konkavlıktan yukarı konkavlığa geçiş yaptığı ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya fonksiyonun dönüm noktası veya büküm noktası denir. İkinci türevi sıfır yapan noktalarda ikinci türev işaret değiştiriyorsa bu noktalar dönüm noktasıdır.

Örnek: $y=x^3$ fonksiyonu için dönüm noktası araştıralım.

$$y'=3x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$$

$$y''=6x=0 \Rightarrow x=0$$

x		0	
f'	$+$	0	$+$
f''	$-$		$+$

$x<0$ için konkav

$x>0$ için konveks

$x=0$ dönüm noktasıdır.